ÉCOLE NAVALE

Concours 1991

Première composition de mathématiques

Durée : 3 heures

Le correcteur tiendra le plus grand compte du soin qu'apporteront les candidats à la présentation de leurs copies et à la rédaction. Le correcteur souhaite vivement que les candidats soulignent – dans chaque démonstration – le point (ou l'idée) qui leur semble le plus important. Les candidats pourront traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes de l'énoncé à condition de le mentionner explicitement. La partie III peut être traitée indépendamment des parties I et II.

Rappelons que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors on dit que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si $\int_0^{+\infty} \operatorname{Re} f(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \operatorname{Im} f(t)\,dt$ convergent et on pose

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} f(t) + i \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

PARTIE I

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que pour tout réel $\lambda > 0$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} u_k$ soit convergente.

Si la fonction $\lambda \to e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} u_k$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ quand $\lambda \to +\infty$ nous dirons que l est la limite généralisée de BOREL de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et nous poserons :

$$\lim_{n \to +\infty} \text{gen } v_n = l = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} u_k$$

1. – Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (au sens usuel) vers $l' \in \mathbb{C}$, alors la limite généralisée de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe. Déterminer lim gen (v_n).

2. – ***a.*** Donner un exemple d'une suite bornée mais non convergente (v_n) de nombres complexes telle que $\lim_{n \to +\infty} \text{gen } v_n$ existe.

b. Donner un exemple d'une suite non bornée (v_n) de nombres complexes telle que $\lim_{n \to +\infty} \text{gen } v_n$ existe.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Dans le problème nous dirons qu'une fonction $f :]A, +\infty[\to \mathbb{C}$ est analytique sur $]A, +\infty[$ si f est de classe C^∞ sur $]A, +\infty[$ et si pour tout t_0 de $]A, +\infty[$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\subset]A, +\infty[$ et $\forall h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} h^n$ converge et a pour somme $f(t_0 + h)$.

3. – Soient f et g deux fonctions analytiques sur $]A, +\infty[$.

Montrer que si f et g coïncident sur un intervalle ouvert I non vide de $]A, +\infty[$ alors $\forall t \in]A, +\infty[\quad f(t) = g(t)$.

(On pourra fixer un point t_0 de I et considérer l'ensemble

$\{t' \in]A, +\infty[\;/\; \forall\ t$ appartenant au segment d'extrémité t_0 et $t', f(t) = g(t)\}$)

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série – éventuellement divergente – de nombres complexes telle que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ soit non nul (R > O). Supposons en outre qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $z \to f(z)$ définie et analytique sur $]-\varepsilon, +\infty[$ telle que $\forall z \in]-\min(\varepsilon, R), +\min(\varepsilon, R)[$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$

D'après le 3. – il existe au plus une telle fonction analytique f définie sur $]-\varepsilon, +\infty[$. Si l'intégrale généralisée : $\int_0^{+\infty} e^{-z} f(z)\, dz$ converge

alors nous notons (par abus) $\int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{n!} \right) dz$ sa valeur et nous l'appelons somme généralisée de BOREL de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

4. – Dans cette question nous supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge .

On pose : $S_0 = 0$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Déterminer les rayons de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} S_n$ et de $\sum_{n\geq 0} \lambda^n \frac{u_n}{n!}$

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Trouver une relation simple entre :

$$e^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} S_n \quad \text{et} \quad \int_0^{\lambda} e^{-z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} u_n \right) dz.$$

c. Montrer – en utilisant la question 1. – que la somme généralisée de BOREL de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ existe et que :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n \right) dz.$$

5. – Donner un exemple de série divergente $\sum u_n$ telle que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n \frac{z^n}{n!}$ soit infini et telle que la somme généralisée au sens de BOREL

$$\int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\sum_{n\geq 0} u_n \frac{z^n}{n!} \right) dz \text{ existe.}$$

6. – Soit $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Posons $u_n = \alpha^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer la somme généralisée au sens de BOREL de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

PARTIE III

7. – On considère l'équation différentielle

$$(E) : \varphi'(x) - \varphi(x) = -\frac{1}{x} \qquad x \in]0, +\infty[$$

a. Déterminer les coefficients C_n, $n \in \mathbb{N}$, d'une solution formelle $\sum_{n\geq 0} C_n \frac{1}{x^{n+1}}$ de l'équation (E).

b. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner une expression simple de la somme de la série entière en $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \frac{C_n}{x^{n+1}} \text{ quand elle converge.}$$

A SUIVRE

Montrer que cette somme se prolonge en une unique fraction rationnelle en z qui sera notée, $f(x, z)$ définie sur $\mathbb{C}\setminus\{-x\}$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Établir une relation simple entre

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-z} f(x, z)\, dz.$$

d. Posons :

$$\varphi^0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \frac{d\xi}{1+\xi}$$

Montrer que $x \to \varphi^0(x)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ solution de l'équation (E).

Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\left| \varphi^0(x) - \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \right| \leqslant \frac{N!}{x^{N+1}}$$

8. — Soient $a_1, a_2, \ldots a_p$ des nombres réels. Montrer que l'équation différentielle

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = \sum_{j=1}^{p} a_j \frac{1}{x^j}$$

possède une unique solution u continument dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$.

Donner une expression simple de u en fonction des réels a_j et des dérivées de la fonction φ^0 définie au 7. — *d.*

9. — Posons $h(x, \xi) = \dfrac{e^{-x\xi}}{1+\xi}$ où x est un réel > 0 fixé. Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale

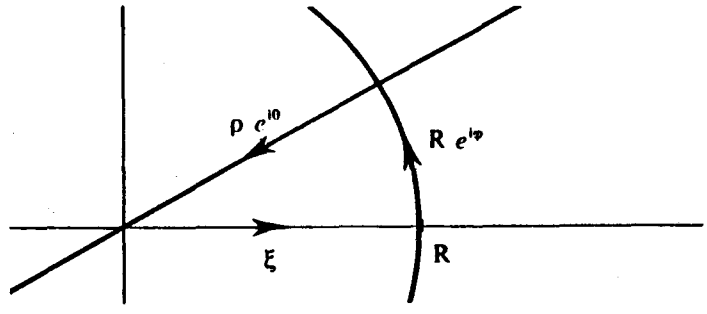
$$\varphi^\theta(x) = \int_0^{+\infty} h(x, \rho e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\rho$$

converge.

b. Pour chaque réel $R \geqslant 0$ on pose :

$$\Psi(x, R) = \int_0^R h(x, \xi)\, d\xi + \int_0^\theta h(x, R e^{i\varphi})\, R\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi - \int_0^R h(x, \rho e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\rho$$

Le dessin ci-dessous illustre la situation :



Calculer, pour $R > 0$, $\dfrac{d}{dR} \Psi(x, R)$

c. En déduire une expression simple de $\Psi(x, R)$

d. Déterminer $\lim_{R \to +\infty} \int_0^\theta h(x, R e^{i\varphi})\, R\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi$

e. En déduire que $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi^\theta(x) = \varphi^0(x)$

FIN